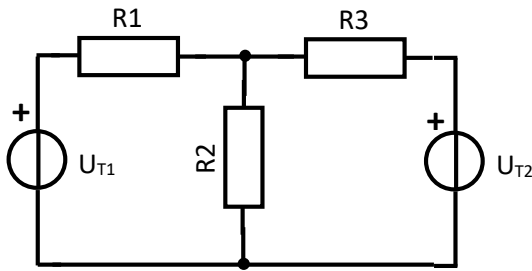


Több áramforrást tartalmazó ellenállás-hálózat számítása

A korábbi tanulmányainkban az ellenállás-hálózat egyetlen tápáram forrást tartalmazott. A gyakorlatban



nem ritka, hogy egy áramkörben több, tápforrásnak tekinthető elektronikai elem is szerepel. Egy ilyen egyszerű hálózat látható az oldalsó ábrán. Keressük az ellenállásokon folyó áramokat, és a rajtuk eső feszültségeket.

Az eddig tanult módszerekkel is megoldható a feladat, ha egy törvényszerűséget megismerünk. Korábbi áramkör ábrázolásainknál a tápáramforrásként az elem szerepelt. A jövőben ezen változtatunk, és bevezetjük az ábrán is látható feszültséggenerátor jelölést.

Az ideális feszültséggenerátor olyan tápáramforrás, ami a kapcsain beállított U_T feszültségét –terhelési értéktől függetlenül- rákényszeríti a terhelésre. Ebből következik, az ideális feszültséggenerátor belső ellenállása 0 ohm. Ezért az ideális feszültséggenerátort nem szabad rövidre zárni, hiszen a 0 ellenállás hatására végtelen áram alakulna ki, ami persze matematikailag is értelmezhetetlen.

Valós feszültséggenerátornak van belső ellenállása, , amit vele sorba kapcsolt ellenállás ábrázolásával értelmezünk.

Bármely egyen- és váltakozó feszültségű áramforrás helyettesíthető az áramkörben egy ideális feszültséggenerátorral, és vele sorba kapcsolt belső ellenállással (Thévenin tétel).

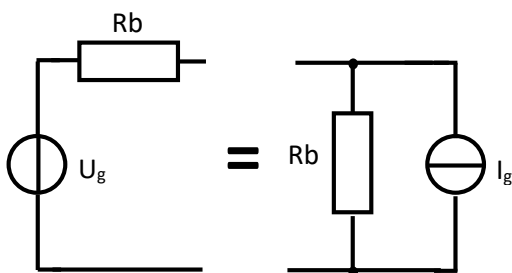
Bevezetünk egy újabb áramforrást, amit **áramgenerátornak** nevezünk. **Az ideális áramgenerátor olyan tápáramforrás, ami a kapcsain beállított I_T áramot –terhelési értéktől függetlenül- rákényszeríti a terhelésre. Ebből következik, az ideális áramgenerátor belső ellenállása ∞ (végtelen) ohm.**

Ezért az ideális áramgenerátort minden esetben terhelni kell, hiszen a ∞ (végtelen) ellenállás hatására végtelen feszültség alakulna ki, ami persze matematikailag is értelmezhetetlen.

Valós áramgenerátornak van belső ellenállása, , amit vele párhuzamosan kapcsolt ellenállás ábrázolásával értelmezünk.

Bármely egyen- és váltakozó áramú áramforrás helyettesíthető az áramkörben egy ideális áramgenerátorral, és vele párhuzamosan kapcsolt belső ellenállással (Norton tétel).

Norton-Thévenin tétel



Egy U_g feszültségű, R_b belső ellenállású feszültséggenerátor helyettesíthető, egy I_g áramú, R_b belső ellenállású áramgenerátorral, melynek I_g árama $I_g = U_g/R_b$ hányadossal számolható. Megfordítva, egy I_g áramú, R_b belső ellenállású áramgenerátor helyettesíthető, egy U_g feszültségű, R_b belső ellenállású feszültséggenerátorral, melynek U_g feszültsége $U_g = I_g \cdot R_b$ szorzattal számolható. A két ábrázolás egyenértékű!

Igazolás

Van egy $U_g=9V$ -s, $R_b=1Kohm$ belső ellenállású feszültséggenerátorunk, melyre $R_t=2 Kohm$ terhelést kapcsolunk. Mekkora a terhelésen folyó I_t áram, és U_t feszültség.

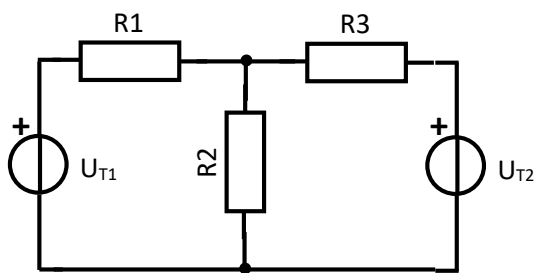
Feszültséggenerátorral $\Rightarrow R_c=R_b+R_t=1+2= 3Kohm \Rightarrow I_c=U_g/ R_c=9/3=3mA \Rightarrow U_t=I_c \cdot R_t=3 \cdot 2=6V$

Feszültséggenerátor átalakítása áramgenerátorrá $\Rightarrow I_g=U_g/ R_b=9/1=9mA$

Áramgenerátorral $\Rightarrow R_c=R_b \cdot R_t / (R_b+R_t)=1 \cdot 2 / (1+2)= 0,67Kohm \Rightarrow U_t=I_g \cdot R_c=9 \cdot 0,67=6V \Rightarrow I_t=U_t/R_t=6/2=3mA$

Az azonos végeredmény igazolta az átváltás egyenértékűségét!

A feladat megoldása az alaptörvények (Ohm, Kirchoff) ismeretében.



$$U_{T1} = 10V$$

$$U_{T2} = 15V$$

$$R1 = 5K\Omega$$

$$I1 = ? \quad U1 = ?$$

$$R2 = 10K\Omega$$

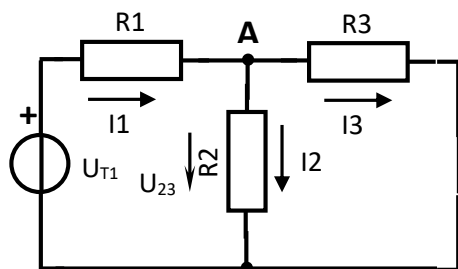
$$I2 = ? \quad U2 = ?$$

$$R3 = 15K\Omega$$

$$I3 = ? \quad U3 = ?$$

A megoldás 2 lépésben (A,B) történik úgy, hogy megoldásonként 1-1 generátor szerepel az áramkörben. A nem szereplő feszültséggenerátor helyébe rövidzár kerül, hisz 0 ohm a belső ellenállása. Végül a megoldásonként született áramértékeket előjelhelyesen összegezzük, és belőlük számoljuk az ellenállásokon ténylegesen eső feszültségeket.

„A” áramkör



$$R_e = R1 + (R2 * R3 / (R2 + R3)) = 5 + (10 * 15 / (10 + 15)) = 5 + 6 = 11 \Omega$$

$$I_e = U_{T1} / R_e = 10 / 11 = 0,91 \text{ mA} \quad I_e = I_{1A} = 0,91 \text{ mA}$$

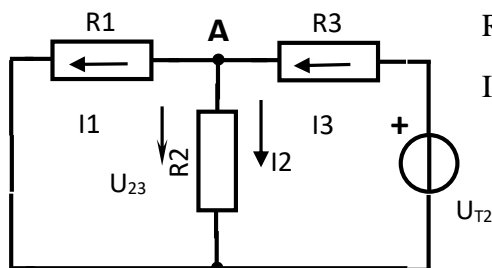
$$U1 = I1 * R1 = 0,91 * 5 = 4,55V$$

$$U_{23} = U_{T1} - U1 = 10 - 4,55 = 5,45V$$

$$I_{2A} = U_{23} / R2 = 5,45 / 10 = 0,545 \text{ mA}$$

$$I_{3A} = U_{23} / R3 = 5,45 / 15 = 0,36 \text{ mA}$$

„B” áramkör



$$R_e = R3 + (R2 * R1 / (R2 + R1)) = 15 + (10 * 5 / (10 + 5)) = 15 + 3,33 = 18,33 \Omega$$

$$I_e = U_{T2} / R_e = 15 / 18,33 = 0,82 \text{ mA} \quad I_e = I_{3B} = 0,82 \text{ mA}$$

$$U3 = I3 * R3 = 0,82 * 15 = 12,3V$$

$$U_{23} = U_{T2} - U3 = 15 - 12,3 = 2,7V$$

$$I_{2B} = U_{23} / R2 = 2,7 / 10 = 0,27 \text{ mA}$$

$$I_{1B} = U_{23} / R1 = 2,7 / 5 = 0,55 \text{ mA}$$

Az eredő eredmény a kiszámított áramok összegzéséből számolható ki. Az összegzésnél figyelembe kell venni az ábrán látható áramirányokat. Az „A” pontra mindkét esetben írjuk fel a csomóponti törvényt (befolyó áram +, elfolyó áram -)

$$I1 = I_{1A} + (-I_{1B}) = 0,91 + (-0,55) = 0,36 \text{ mA} \quad (\text{az eredő áram az A csomópontba befolyik!})$$

$$I2 = (-I_{2A}) + (-I_{2B}) = (-0,55) + (-0,27) = -0,82 \text{ mA} \quad (\text{az eredő áram az A csomópontból elfolyik!})$$

$$I3 = (-I_{3A}) + I_{3B} = (-0,36) + 0,82 = 0,46 \text{ mA} \quad (\text{az eredő áram az A csomópontba befolyik!})$$

Ellenőrizzük csomóponti törvénnyel, $I1 + I3 + I2 = 0$, $0,36 + 0,46 - 0,82 \text{ mA} = 0$, vagyis helyes az eredmény!

Hiányoznak még az ellenállásokon eső feszültségek, ami kiszámítható a rajtuk átfolyó eredő áramok és az ellenállásértékek ismeretében.

$$U1 = I1 * R1 = 0,36 \text{ mA} * 5K = 1,8V$$

$$U2 = I2 * R2 = 0,82 \text{ mA} * 10K = 8,2V$$

$$U3 = I3 * R3 = 0,46 \text{ mA} * 15K = 6,9V$$

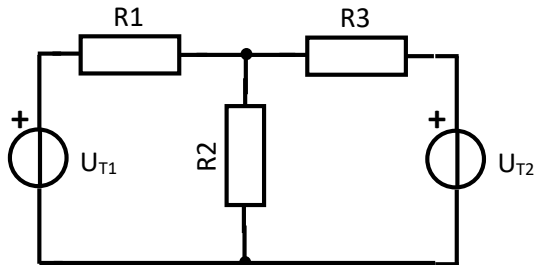
Ellenőrizzük hurok törvénnyel a hurkokat

$$U_{T1} \text{ áramköri hurokra, } U_{T1} - U1 - U2 = 0 \quad 10 - 1,8 - 8,2 = 0V \quad \text{vagyis helyes az eredmény!}$$

$$U_{T2} \text{ áramköri hurokra, } U_{T2} - U3 - U2 = 0 \quad 15 - 6,9 - 8,2 = -0,1V \quad (\text{kerekítési hiba}) \quad \text{vagyis helyes az eredmény!}$$

A feladat megoldása Norton-Thévenin tétel alkalmazásával.

Megjegyzem, a tétel részben, csak a terhelésre vonatkozóan működik helyesen. Ennek oka, hogy a több feszültséggenerátor alkalmazása miatt, a generátorok áramai ellenárammal hatnak a másik generátor belső ellenállására. A Norton átalakítás, a belső ellenállásokra ezt nem követi. Viszont a terhelő ellenálláson (R2) helyesen kiszámítható feszültség és áramviszonyok meghatározását követően, visszatérve az eredeti kapcsoláshoz, már helyesen határozhatók meg a belső ellenállásokon mérhető mennyiségek



$$U_{T1} = 10V$$

$$U_{T2} = 15V$$

$$R1 = 5K\Omega$$

$$R2 = 10K\Omega$$

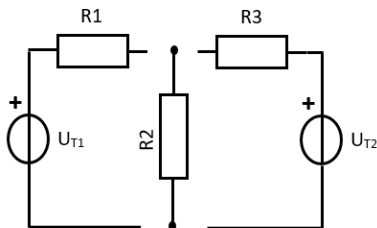
$$R3 = 15K\Omega$$

$$I1 = ? \quad U1 = ?$$

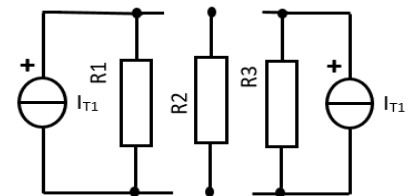
$$I2 = ? \quad U2 = ?$$

$$I3 = ? \quad U3 = ?$$

Bontsuk fel az áramkört 3 darab, 2 aktív és 1 passzív két pólusra!



Kézenfekvőnek látszik, a feszültséggenerátorok átalakítása -Norton-Thévenin tétel alapján- áramgenerátorrá, így az áramkör átalakul párhuzamosan kapcsolt ellenállások, és áramgenerátorok hálózatává.



Az átalakított áramkör elemei:

$$I_{T1} = U_{T1}/R1 = 10/5K = 2 \text{ mA} \text{ (a valós feszültséggenerátor kapcsai rövidzárásával képződik)}$$

$$I_{T2} = U_{T2}/R3 = 15/15K = 1 \text{ mA}$$

$$I_{Te} = I_{T1} + I_{T2} = 2 + 1 = 3 \text{ mA}$$

$$1/Re = 1/R1 + 1/R2 + 1/R3 = 1/5 + 1/10 + 1/15 = 0,2 + 0,1 + 0,067 = 0,367 \quad Re = 1/0,367 = 2,73 \text{ Kohm}$$

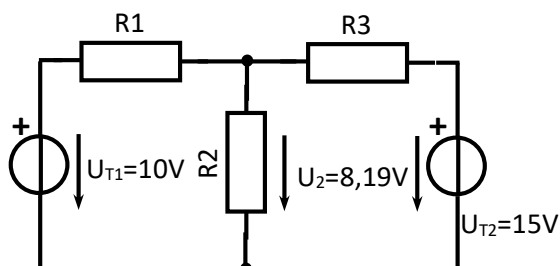
$$\text{Az eredő ellenálláson megjelenő feszültség kiszámítható } U_{Re} = I_{Te} * Re = 3\text{mA} * 2,73\text{Kohm} = 8,19\text{V}$$

Itt kell a kapott eredményt nagy odafigyeléssel kezelni. Az átalakítás során csak párhuzamos ellenállások képezik az eredő ellenállást, ami szerint valamennyi tagon azonos feszültségnek kellene lennie. Ez az Rb(R1, R3) belső ellenállásokra helytelen eredményt ad! Szerencsére viszont a terhelő ellenállásra (R2) helyes eredmény született, így a kapott eredményt behelyettesítve az eredeti áramkörbe, már kiszámíthatók a hiányzó adatok.

A kapott U_{Re} megfelel az R2-s ellenálláson eső feszültséggel, U_2 -vel (csomópontok között mérhető).

Ebből meghatározható az $I_2 = U_2/R2 = 8,19/10K = 0,82 \text{ mA}$ (A csomópontban – előjelű)

Az eredményt visszahelyettesítve az eredeti (feszültséggenerátoros) kapcsolásba, már meghatározhatók a hiányzó adatok.



$$U1 = U_{T1} - U_2 = 10 - 8,19 = 1,81V$$

$$I1 = U1/R1 = 1,81/5K = 0,36 \text{ mA}$$

$$U3 = U_{T2} - U_2 = 15 - 8,19 = 6,81V$$

$$I3 = U3/R3 = 6,81/15K = 0,45 \text{ mA}$$

Összehasonlítva a kapott eredményeket az előző példa eredményeivel, a kerekítési hibáktól eltekintve, **azonos eredmények születtek. Utóbbi eljárás kevesebb számítást igényelt!**